Calcul de sommes séries alternées

Partie I

1.a Montrer que pour tout $x \in]-1,+\infty[$, $\ln(1+x) \leq x$.

1.b En déduire que pour tout $n \geq 1$: $\ln(n+1) - \ln n \leq \dfrac{1}{n}$

et que pour tout $n \geq 2$: $\dfrac{1}{n} \leq \ln n - \ln(n-1)$.

2. Pour $n \geq 1$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

2.a Etablir que pour tout $n \geq 1$: $\ln(n+1) \leq H_n \leq \ln n + 1$.

2.b Déterminer un équivalent simple à la suite (H_n) ainsi que sa limite.

3. Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = H_n - \ln(n+1)$.

3.a Montrer que la suite (u_n) est convergente.
On pose $\gamma = \lim_{n \to +\infty} u_n$. Ce réel est appelé constante d'Euler.

3.b Etablir l'identité $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$.

Partie II

1. Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$.

1.a Montrer que les suites extraites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

1.b Quelle est la nature de la suite (S_n) ?

2. Dans cette question, on se propose de calculer $\ell = \lim_{n \to +\infty} S_n$.

2.a Etablir que pour tout $n \geq 1$: $S_{2n} = H_{2n} - H_n$.

2.b En exploitant le résultat de la question I.3.b, déterminer ℓ.

3. En discutant selon la parité de n, établir la majoration : $|S_n - \ell| \leq \dfrac{1}{n+1}$.

Partie III

1. Pour $n \geq 1$, on pose $T_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \cos \dfrac{2k\pi}{3}$.

1.a Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $T_{3n} = a \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{3k} + b \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{3k+1} + c \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{3k+2}$.

1.b En déduire que $T_{3n} = \dfrac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{2} \sum_{k=1}^{3n} \dfrac{1}{k}$.

2. Déterminer la limite de la suite (T_n).